



ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ
СО АН СССР

О ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ МЕЗОННЫХ ПАР И
МЕЗОННЫХ РЕЗОНАНСОВ

А.Г.Грозин

ПРЕПРИНТ 82-102



Новосибирск

ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ СО АН СССР

А.Г.Грозин

О ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ МЕЗОННЫХ ПАР И МЕЗОННЫХ
РЕЗОНАНСОВ

Новосибирск

1982

Бреженский Физический
ИНСТИТУТ
Зал преприатов

О ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЯХ МЕЗОННЫХ ПАР И МЕЗОННЫХ
РЕЗОНАНСОВ

А.Г.Грозин

А Н Н О Т А Ц И Я

Вычислены волновые функции мезонных пар с большой инвариантной массой. Приведены правдоподобные качественные аргументы, свидетельствующие в пользу гладкой сшивки полученных асимптотических формул с хвостами резонансов. Исходя из условия сшивки, получены выражения для волновых функций ρ , f , S^* мезонов через волновую функцию π мезона.

ON THE WAVE FUNCTIONS OF MESON PAIRS
AND MESON RESONANCES

A. G. Grozin

Institute of Nuclear Physics, Novosibirsk 630090

ABSTRACT

Hadron wave functions determine the matrix elements of their production or annihilation at short distances. They are currently attracting great attention. If a multi-hadron system with $m \ll Q$ is produced instead of a single hadron, then the matrix element contains the wave function of this system (here m is the mass of this system, and Q is the characteristic momentum transfer in the hard process being considered). In the present paper the wave functions of meson pairs with $m \gg \mu$ are calculated (here μ is the characteristic confinement momentum). These functions allow one to obtain the cross sections of the processes $e^+e^- \rightarrow \gamma(M_1, M_2)$, $M(M_1, M_2)$, etc. with the help of a simple substitution in the known formulae for the processes $e^+e^- \rightarrow \gamma M'$, MM' ... Under a given condition ($Q \gg m \gg \mu$) the first parton pair is produced at a distance of $\sim 1/Q$, the second parton pair is produced at a distance of $\sim 1/m$, and then two mesons are formed.

The production amplitude of the meson pair with $m \gg \mu$ behaves as $1/m^2$, i.e. just like the tail of the corresponding resonance. The likely qualitative arguments indicate the smooth joining of these two regimes. One can express, with the help of this condition, the wave functions of meson resonances via the wave functions of the mesons in the pair. The expressions for the wave functions of the ρ , f , S^* mesons via the π meson wave function are derived just in the fashion mentioned above. The normalization of the ρ meson wave function obtained is in good agreement with experiment.

Процессы формирования мезонов на малых расстояниях могут быть рассмотрены в рамках теории возмущений в квантовой хромодинамике /1-5/. Мезон образуется из бесцветной пары партонных и характеризуется волновой функцией $f_M^p(x)$, имеющей смысл амплитуды вероятности найти в мезоне M ровно 2 партон, партон p с долей импульса x и другой партон с долей импульса $x' \equiv 1-x$. Развитый подход был обобщен /6/ на случай, когда вместо одного мезона образуется система из нескольких адронов, инвариантная масса которой $m \ll Q$, где Q - характеристическая передача импульса в жесткой стадии процесса. В этом случае вместо волновой функции f_M дискретного уровня - мезона надо подставить волновую функцию непрерывного спектра f_S , описывающую эту систему. Волновые функции многоадронных систем, как и отдельных адронов, вообще говоря, не вычислимы в теории возмущений КХД. Если $m \gg \mu$, где μ - характеристический импульс удержания, то они удовлетворяют простым соотношениям полноты, выражающим партон-адронную дуальность /6/. В настоящей работе вычисляются волновые функции мезонных пар с большой инвариантной массой $m \gg \mu$. Используя их, легко рассчитать сечения рождения таких пар в различных процессах, например $e^+e^- \rightarrow \gamma(M_1, M_2)$, $e^+e^- \rightarrow M(M_1, M_2)$ и др., при условии

$$Q \gg m \gg \mu \quad (I)$$

Если привлечь также некоторые правдоподобные соображения об области не очень больших m , то можно получить приближенный способ вычисления волновых функций мезонных резонансов, например, ρ , f , S^* .

Пусть импульсы мезонов в паре будут k_1 и k_2 , $k_1^2 = 0$, $k_2^2 = 0$, $k = k_1 + k_2$, $k^2 = m^2$. В жесткой части диаграммы можно приближенно полагать $k^2 \approx 0$, $k_1 \approx yk$, $k_2 \approx y'k$ ($y' \equiv 1-y$), где y - доля импульса пары, несомая первым мезоном. Она связана с углом вылета первого мезона α в системе центра масс пары соотношением $y = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. Пусть p - второй характеристический импульс жесткого процесса, такой, что $p^2 = 0$, $q = p + k$, $q^2 = Q^2$.

При условии (I) процесс рождения пары происходит так: сна-

чала на "совсем малых" расстояниях $\sim 1/a$ рождается пара партонов, затем на "умеренно малых" расстояниях $\sim 1/m$ рождается вторая пара, и формируются 2 мезона (рис.1а). Амплитуда процесса пропорциональна $1/m^2$; если бы все 4 партона рождались на "совсем малых" расстояниях, на этом месте стоял бы фактор $1/a^2$. Удобно использовать аксиальную калибровку $p \cdot A = 0$, тогда излучение глюонов изнутри "совсем жесткой" части диаграммы (рис.1б) будет подавлено.

В настоящей работе мы будем рассматривать пару мезонов типа PP или SS (по классификации мезонных волновых функций /4-5/), причем оба мезона будут предполагаться не совпадающими со своими античастицами. К этому случаю относятся, например, пары $\pi^+\pi^-$, $K\bar{K}$ и др; другие возможные случаи слишком многочисленны, и будут рассмотрены отдельно. Чтобы пара могла рождаться рассматриваемым образом, валентный антикварк одного из мезонов должен быть того же сорта, что кварк другого. Тогда пара имеет кварковую волновую функцию типа S , равную (рис.1а).

$$f_{M_1 M_2, y}^{q_1 \bar{q}_2}(x) = 2 \frac{C_F}{N} \frac{\pi \alpha_s}{m^2} \int \left[\frac{y}{x_1' x_2'} \left(1 + \frac{y'}{y x_1' + y' x_2'} \right) \times \delta(x - y x_1) - \frac{y'}{x_1' x_2'} \left(1 + \frac{y}{y x_1' + y' x_2'} \right) \delta(x - y' x_2') \right] \times f_{M_1}^{q_1 \bar{q}_3}(x_1) dx_1 f_{M_2}^{q_3 \bar{q}_2}(x_2) dx_2 \quad (2)$$

Если и вторая кварк-антикварковая пара одного сорта, у пары есть также глюонная волновая функция типа S , равная (рис.1в)

$$f_{M_1 M_2, y}^{gg}(x) = \frac{1}{4N} \frac{\pi \alpha_s}{m^2} \int \left[\frac{1}{x_1 x_1' x_2 x_2'} - \frac{y y'}{x x'} \left(\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1' x_2'} \right) \right] \delta(x - y x_1 - y' x_2') \times f_{M_1}^{q_1 \bar{q}_2}(x_1) dx_1 f_{M_2}^{q_2 \bar{q}_1}(x_2) dx_2 \quad (3)$$

Эти волновые функции относятся к мезонной паре с определенным углом вылета α (или долей импульса y). Чтобы получить волновые функции пары с определенным орбитальным моментом l , формулы (2-3) надо проинтегрировать с

$$\sqrt{2l+1} P_l(2y-1) dy$$

Интеграл от кварковой волновой функции

$$f^P = \int_0^1 f^P(x) dx \quad (4)$$

отличен от 0 только при $l = 1$ и равен

$$f_{M_1 M_2, l=1}^{q_1 \bar{q}_2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C_F}{N} \frac{\pi \alpha_s}{m^2} I_{M_1}^{q_1} I_{M_2}^{\bar{q}_2} \quad (5)$$

где

$$I^P = \int_0^1 \frac{f^P(x) dx}{1-x} \quad (6)$$

Аналогично, интеграл от глюонной волновой функции

$$\int_0^1 f_{M_1 M_2, l}^{gg}(x) x x' dx = \frac{C_G}{4N} \frac{\pi \alpha_s}{m^2} \times \left[f_{M_1}^{q_1} (I_{M_2}^{q_2} + I_{M_2}^{\bar{q}_2}) + (-1)^l f_{M_2}^{q_2} (I_{M_1}^{q_1} + I_{M_1}^{\bar{q}_1}) \right] \quad (7)$$

отличен от 0 только при $l = 0$ ($C_0 = \frac{1}{3}$), $l = 1$ ($C_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}$) и $l = 2$ ($C_2 = \frac{1}{6\sqrt{5}}$).

Теперь для нахождения сечений рождения мезонных пар в различных процессах достаточно в известных формулах для сечений рождения мезонов (типа S) (см. напр. /4-6/) заменить кварковую и глюонную волновые функции мезона на волновые функции пары (2-3).

Волновые функции мезонных пар (2-3) зависят от m^2 так же, как хвосты соответствующих резонансов (рис.1г). Поэтому не выглядит неправдоподобным предположение, что хвост резонанса плавно сшивается с асимптотическими выражениями (2-3), и существует перекрытие области доминантности резонанса и асимптотической области. Сравнивая амплитуды рис.1а и рис.1г, можно получить приближенный способ вычисления волновых функций мезонных резонансов. В общем случае можно написать дисперсионное представление для волновой функции мезонной пары

$$f_{M_1, M_2}^{q_1 \bar{q}_2} = \sum_s \frac{f_s^{q_1 \bar{q}_2} A_{s \rightarrow M_1, M_2}}{m^2 - m_s^2 + i0} \quad (8)$$

Описанное приближение соответствует тому, что в правой части (8) можно оставить только вклад резонанса.

В пользу допустимости такого приближения говорят следующие качественные соображения. В соответствии со смыслом волновой функции $f_s^{q_1 \bar{q}_2}$, нормированной в точке m^2 , кварки q_1 и \bar{q}_2 должны находиться на малых поперечных расстояниях $\sim 1/m$ друг от друга. Поэтому те адронные системы S , в которых кварки q_1 и \bar{q}_2 находятся в разных адронах, имеют пренебрежимо малую волновую функцию $f_s^{q_1 \bar{q}_2}$. Значит, наиболее существенные вклады в (8) дают основной резонанс и его радиальные возбуждения. Радиальные возбуждения рыхлее основного резонанса, и их вклад должен быть заметно меньше. Этот способ вычисления волновых функций резонансов не претендует, конечно, на значительную точность, но можно надеяться, что он правильно воспроизводит порядки величин и основные черты поведения волновых функций.

Рассмотрим таким образом $\pi^+ \pi^-$ пары с $\ell = 0, 1, 2$, которым соответствуют резонансы S^* , ρ^0 , f . Пусть $f_{S^*, \rho^0, f}(x) = \sqrt{2} f_{S^*, \rho^0, f}^u(x)$ (тогда $f_\rho(x) = f_{\rho^+}(x)$). Для кварковой волновой функции $f_{S^*, \rho^0, f}$ - мезона, например, мы имеем

$$f_\rho(x) = \frac{C_F}{N} \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{\alpha_s}{\sqrt{m_\rho \Gamma_\rho}} \int \left[\frac{y}{x_1' x_2} \left(1 + \frac{y'}{y x_1' + y' x_2'} \right) \times \delta(x - y x_1) - \frac{y'}{x_1' x_2} \left(1 + \frac{y}{y x_1' + y' x_2'} \right) \delta(x' - y' x_2') \right] \times (2y-1) dy f_\pi(x_1) dx_1 f_\pi(x_2) dx_2 \quad (9)$$

Здесь амплитуда $A_{\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-}$ выражена через Γ_ρ . Соответствующая формула для S^* получается заменой $\sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{m_\rho \Gamma_\rho}}$ на $\frac{\sqrt{3\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{m_{S^*} \Gamma_{S^* \rightarrow \pi\pi}}}$ и $(2y-1)$ на 1, а для f соответственно на $\frac{\sqrt{15\pi}}{4} \frac{1}{\sqrt{m_f \Gamma_f}}$ и $(1-6y+6y^2)$. Глюон-

ная волновая функция S^* равна

$$f_{S^*}^q(x) = \frac{\sqrt{6\pi}}{32N} \frac{\alpha_s}{\sqrt{m_{S^*} \Gamma_{S^* \rightarrow \pi\pi}}} \int \left[\frac{1}{x_1 x_1' x_2 x_2'} - \frac{yy'}{xx'} \left(\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_1' x_2'} \right) \right] \delta(x - y x_1 - y' x_2') \times dy f_\pi(x_1) dx_1 f_\pi(x_2) dx_2 \quad (10)$$

Соответствующая формула для f получается заменой $\frac{\sqrt{6\pi}}{32} \frac{1}{\sqrt{m_{S^*} \Gamma_{S^* \rightarrow \pi\pi}}}$ на $\frac{\sqrt{30\pi}}{64} \frac{1}{\sqrt{m_f \Gamma_f}}$ и добавлением множителя $(1-6y+6y^2)$ под интеграл. Глюонная волновая функция ρ мезона, конечно, равна 0. Полученные таким образом волновые функции резонансов автоматически удовлетворяют нужным свойствам симметрии /5/.

Для интеграла от волновой функции ρ - мезона получается простая формула

$$f_\rho = \frac{C_F}{N} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{\alpha_s I_\pi^2}{\sqrt{m_\rho \Gamma_\rho}} \quad (11)$$

Она имеет простой смысл: асимптотическая формула для формфактора π мезона плавно сшивается с хвостом ρ мезона $F_\pi(Q^2) = \frac{f_\rho \sqrt{24\pi m_\rho \Gamma_\rho}}{Q^2 - m_\rho^2} \rightarrow \frac{C_F 2\pi \alpha_s I_\pi^2}{N Q^2}$. Это соотношение хорошо подтверждается экспериментально: распады $\psi, \psi' \rightarrow \pi\pi$, идущие через виртуальный фотон, дают точки для формфактора с самым большим Q^2 , и эти точки в пределах экспериментальных ошибок лежат на хвосте ρ мезона. Можно рассматривать формулу (9) как обобщение удачного полумпирического соотношения (11) на более детальные характеристики ρ мезона. Для интеграла I_ρ из (9) нетрудно получить

$$\frac{I_\rho}{f_\rho} = \frac{3}{I_\pi} \int \left[\frac{2-x}{x^3} \ln \frac{1}{1-x} - \frac{2}{x^2} \right] f_\pi(x) dx \quad (12)$$

Для получения дальнейших следствий необходимо более детальное знание волновой функции π мезона. Черняк и Китницкий /7/ на основании анализа правил сумм предложили модельную волно-

вую функцию π мезона, в точке нормировки (500 МэВ)² имеющую вид

$$f_{\pi}(x) = 120 f_{\pi} x(1-x)(x - 1/2)^2 \quad (13)$$

Она согласуется с экспериментальными данными о распадах Ψ , Ψ' , χ_0 , $\chi_2 \rightarrow \pi\pi$ /8/. Следует подчеркнуть, что (13) — это просто простейшая полиномиальная параметризация, не противоречащая результатам анализа правил сумм, а отнюдь не доказанное их следствие. За неимением более надежных сведений, подставим волновую функцию π мезона (13) в формулы (9-10) и получим модельные волновые функции ρ , f , S^* . Интегралы были вычислены аналитически с использованием системы REDUCE, они не приводятся здесь ввиду своей громоздкости. Графики представлены на рис.2.

Следует иметь в виду, что хотя формально в главном порядке точку нормировки f_{M_1} , f_{M_2} , $f_{M_1 M_2}$ и α_S в (2-3) следует считать равной m^2 , при работе в области небольших m^2 ее изменение в несколько раз заметно сказывается на результатах. Для волновой функции (13) характерная виртуальность глюона на рис.1а $\sim x_0^2 m^2$, а кварка $\sim x_0 m^2$, где $x_0 \sim 0,15$. Разумной точкой нормировки волновой функции мезона является наименьшая виртуальность пропагатора на пути по диаграмме от одного до другого внешнего конца, образующих мезон. Поэтому f_{M_1} и f_{M_2} следует брать в точке нормировки $x_0^2 m^2$, а $f_{M_1 M_2}$ получается в точке нормировки $x_0 m^2$. Аналогично, разумной точкой нормировки α_S является наибольшая виртуальность пропагатора в данной вершине, поэтому на рис.1а следует заменить α_S на

$\sqrt{\alpha_S(x_0 m^2) \alpha_S(x_0^2 m^2)}$. Используя волновую функцию π мезона (13), нормированную в точке $(0,50 \text{ ГэВ})^2$, мы получим волновые функции резонансов в точке $(1,29 \text{ ГэВ})^2$, при этом $m^2 \sim (3,33 \text{ ГэВ})^2$.

На рис.2а изображена функция $\frac{1}{f_{\rho}} f_{\rho}(x)$, полученная по формуле (9). Здесь же изображена волновая функция ρ мезона, полученная из анализа правил сумм /9/. Заметим, что она представляется менее надежной, чем волновая функция π мезона /7/, т.к. вследствие сильных сокращений степенных поправок авторы /9/ не смогли определить из правил сумм второй момент волновой функции, который в случае π мезона был наиболее надежным источ-

ником сведений о форме волновой функции (для волновой функции ρ мезона (9) с учетом (13) второй момент равен 0). Если не считать области малых x и x' , где вычисление становится совершенно ненадежным, эти волновые функции удовлетворительно согласуются между собой.

Как видно из (9-10), в рассматриваемом подходе естественным масштабом волновых функций f и S^* являются

$$f_f^0 = \sqrt{\frac{m_{\rho} \Gamma_{\rho}}{m_f \Gamma_f}} f_{\rho}, \quad f_{S^*}^0 = \sqrt{\frac{m_{\rho} \Gamma_{\rho}}{m_{S^*} \Gamma_{S^* \rightarrow \pi\pi}}} f_{\rho} \quad (14)$$

В случае S^* , если подставить табличную его ширину, он окажется неразумно большим. Однако в работе /10/ утверждается, что форма S^* резонанса сильно искажена близостью порога в канале $K\bar{K}$, и "истинная" его ширина (которую и надо подставлять в (9-10), т.к. именно она связана с амплитудой $A_{S^* \rightarrow \pi\pi}$) значительно больше, чем наблюдаемая. На рис.2б изображены кварковые волновые функции $\frac{1}{f_f^0} f_f^q(x)$, $\frac{1}{f_{S^*}^0} f_{S^*}^q(x)$. Их нормировка определяется интегралом

$$\frac{1}{f_f^0} \int f_f^q(x)(2x-1)dx \approx 0,41 \quad (15)$$

$$\frac{1}{f_{S^*}^0} \int f_{S^*}^q(x)(2x-1)dx \approx 0,57$$

Для f мезона нормировочный интеграл (15) численно получается равным 60 МэВ. Недавно Алиев и Шифман /11/ определяли его из подгонки правил сумм, их результат составляет 21 МэВ.

На рис.2 в изображены глюонные волновые функции

$$\frac{1}{f_f^0} f_f^g(x), \quad \frac{1}{f_{S^*}^0} f_{S^*}^g(x); \quad \text{их нормировки}$$

$$f_f^g / f_f^0 \approx 1,4 \cdot 10^{-4}, \quad f_{S^*}^g / f_{S^*}^0 \approx 8,8 \cdot 10^{-4} \quad (16)$$

Таким образом, глюонные волновые функции получаются численно очень малыми. Это объясняется тем, что перед интегралом в (10) стоит малый численный множитель (содержащий $1/N$), и сам ин-

теграл (10) менее сингулярен в области малых $x_{1,2}$ или $x'_{1,2}$, где велика функция (13). С учетом асимптотической формулы /5/, выражающей ширину распада $\Psi_q \rightarrow \gamma f$ (Ψ_q — тяжелый векторный кварконий), это, возможно, свидетельствует в пользу того, что реально наблюдаемый распад $\Psi \rightarrow \gamma f$ определяется операторами твиста 4 (как и $\Psi \rightarrow \gamma \eta, \gamma \eta'$). В пользу такого предположения говорят также результаты недавнего эксперимента /12/, в котором была измерена поляризация f мезона в распаде $\Psi \rightarrow \gamma f$. Для отношений спиральных амплитуд A_λ были получены результаты $A_1/A_0 = 0,88 \pm 0,13$, $A_2/A_0 = 0,04 \pm 0,19$, тогда как асимптотический механизм /5/ дает только нулевую спиральность f мезона.

В заключение подчеркнем, что само по себе вычисление волновых функций мезонных пар с большой инвариантной массой является вполне надежным. Напротив, результаты о волновых функциях резонансов не являются надежно обоснованными, т.к. остается неясным, как оценить вклад высших состояний в дисперсионном представлении (8). Даже грубый его учет представляется весьма желательным. Сравнение этих результатов (основанных на расчете распада сильно виртуального резонанса по теории возмущений) с результатами анализа правил сумм, в тех случаях, когда оно возможно, показывает довольно плохое согласие. Однако при определении формы волновых функций из правил сумм возникают серьезные проблемы, связанные с сингулярным характером степенных поправок при $x \rightarrow 0$ или 1. Кроме того, форма волновой функции ρ мезона восстанавливается вообще не очень надежно.

Мне приятно поблагодарить В.Н.Байера за постоянное внимание к работе и многочисленные обсуждения, а также В.Л.Черняка и А.Р.Житницкого за обсуждения работ /7-9/.

Л и т е р а т у р а

1. G.P.Lepage, S.J.Brodsky. Phys.Rev. D22, 2157 (1980).
2. В.Л.Черняк. Материалы 15 зимней школы ЛИЯФ (1980).
3. A.V.Bfremov, A.V.Radyushkin. Phys.Lett. 94B, 245 (1980).
4. V.N.Baier, A.G.Grozin. Nucl.Phys. B192, 476 (1981)
5. В.Н.Байер, А.Г.Грозин. ЯФ 35, 1021 (1982).
6. В.Н.Байер, А.Г.Грозин. ЯФ 35, 1537 (1982).
7. V.L.Chernyak, A.R.Zhitnitsky. Preprint IYaF 81-74 (1981).
8. V.L.Chernyak, A.R.Zhitnitsky. Preprint IYaF 81-75 (1981).
9. V.L.Chernyak, A.R.Zhitnitsky, I.R.Zhitnitsky. Preprint IYaF 82-26 (1982).
10. Н.Н.Ачасов, С.А.Девянин, Г.Н.Шестаков. ЯФ 32, 1098 (1980).
11. T.M.Aliev, M.A.Shifman. Phys.Lett. 112B, 401 (1982).
12. C.Edwards a.o. Phys.Rev. D25, 3065 (1982).

Подписи к рисункам:

Рис. 1.

- а) Диаграммы рождения мезонной пары через кварковую волновую функцию.
- б) Диаграмма с излучением глюона изнутри жесткой стадии
- в) Диаграмма рождения мезонной пары через глюонную волновую функцию
- г) Диаграмма рождения мезонной пары через промежуточный резонанс

Рис. 2.

- а) Волновая функция ρ мезона: кривая 1 - полученная в настоящей работе, кривая 2 - из [9]
- б) Кварковые волновые функции S^* и f мезонов
- в) Глюонные волновые функции S^* и f мезонов

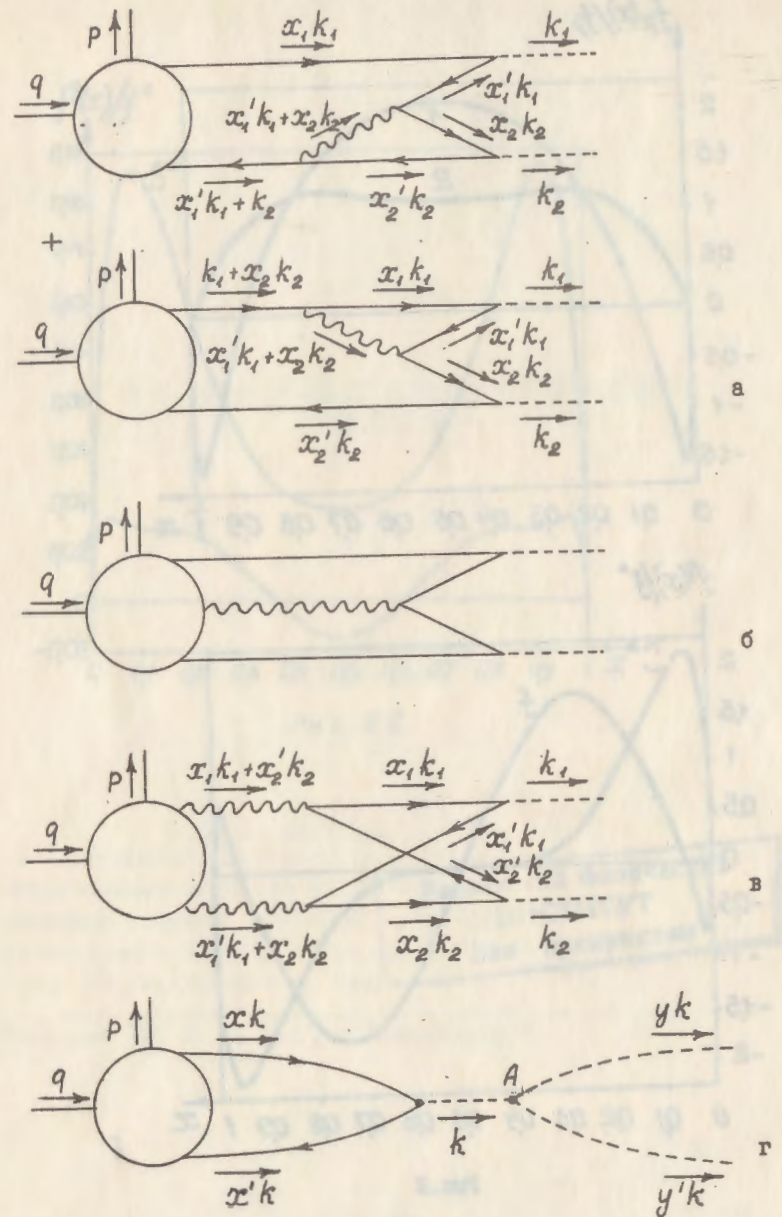


Рис. 1

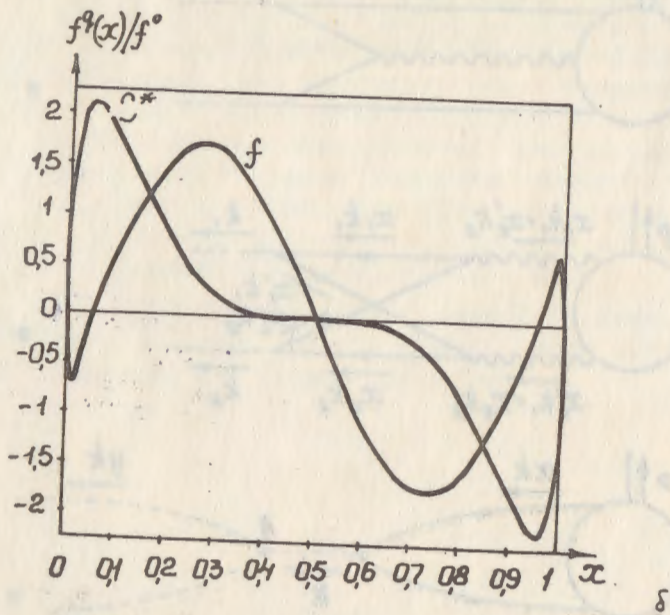
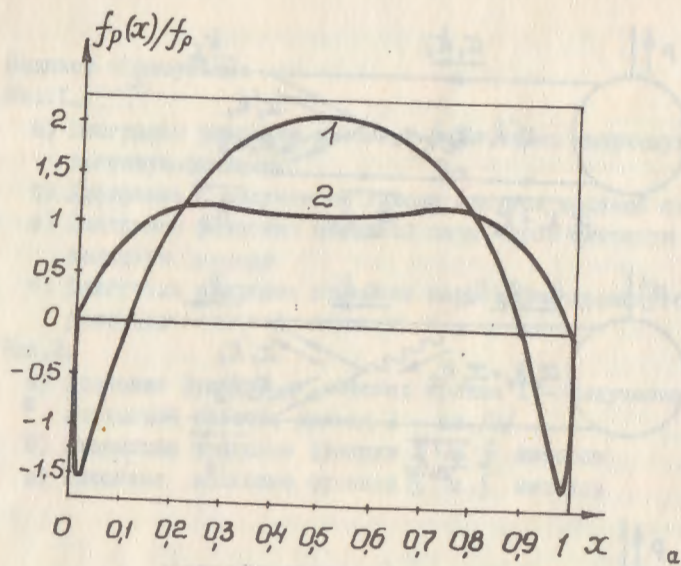


Рис. 2

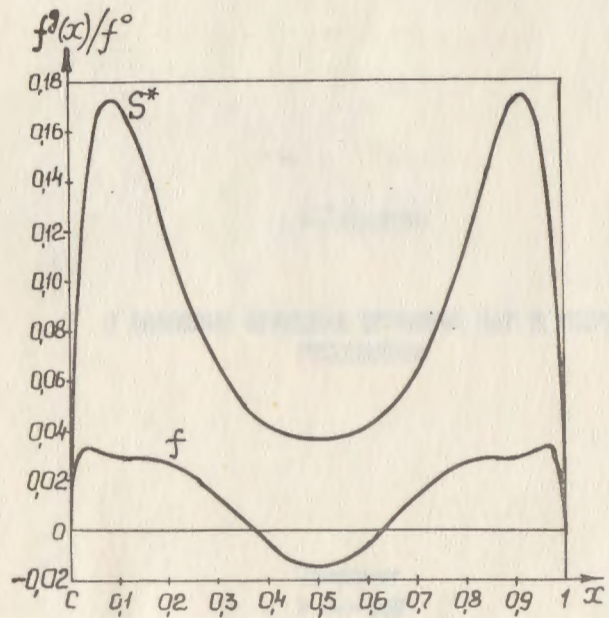


Рис. 26

Временский Физический
ИНСТИТУТ
Зал предприятий